# Mathématiques

# Première

# Polynômes du second degré

Fiche de cours

## 1/ Reconnaître et choisir une forme

Une fonction polynôme du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les coefficients $a$, $b$ et $c$ sont réels, avec $a \neq 0$.

| Forme | Expression | Ce qu'elle permet de lire |
|---|---|---|
| Développée réduite | $ax^2 + bx + c$ | Les coefficients ; $f(0) = c$. |
| Canonique | $a(x - \alpha)^2 + \beta$ | Le sommet et l'extremum. |
| Factorisée (si elle existe) | $a(x - x_1)(x - x_2)$ | Les racines et le signe. |

### Déterminer une forme canonique dans un cas simple

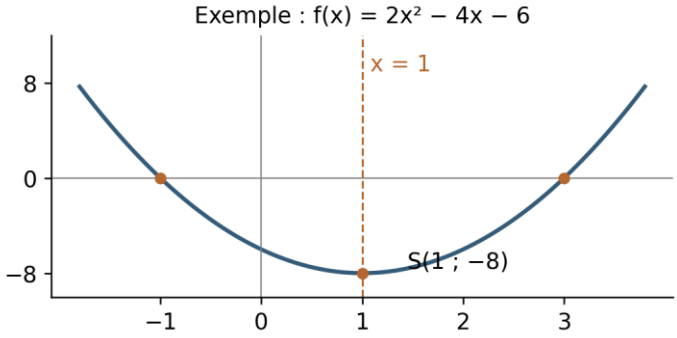
On fait apparaître le début d'un carré à l'aide d'une identité remarquable.

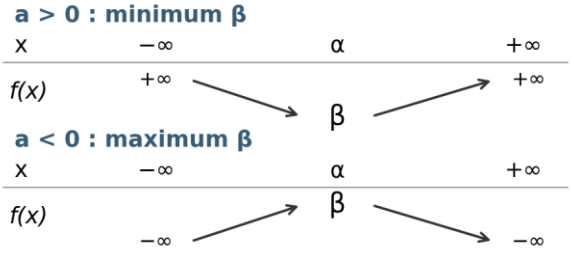
$$x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

Pour $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

## 2/ Lire la parabole et les variations

La courbe est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie $x = \alpha$. Si $a > 0$, elle est tournée vers le haut ; si $a < 0$, vers le bas.




L'extremum vaut $\beta$ et est atteint pour $x = \alpha$ : c'est un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 1)^2 - 8$. Son minimum est −8, atteint pour $x = 1$. Elle décroît sur $]-\infty; 1]$, puis croît sur $[1; +\infty[$.

## 3/ Trouver les racines et factoriser

Une racine réelle est un nombre $r$ tel que $f(r) = 0$. Graphiquement, c'est l'abscisse d'un point où la parabole rencontre l'axe des abscisses.

### Chercher d'abord une factorisation simple

Utiliser un facteur commun, une identité remarquable ou des racines évidentes avant de calculer le discriminant.

$$3x^2 - 12x = 3x(x-4) \quad ; \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

Pour un produit nul, au moins un facteur est nul : les racines sont respectivement 0 et 4, puis −3 et 3.

### Utiliser le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

| Discriminant | Racines réelles | Factorisation sur $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $a(x - x_1)(x - x_2)$ |
| $\Delta = 0$ | Une racine double<br>$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ | $a(x - x_0)^2$ |
| $\Delta < 0$ | Aucune racine réelle. | Aucune factorisation en facteurs du premier degré réels. |

Attention : ces formules ne donnent pas forcément $x_1 < x_2$. Il faut ordonner les racines avant de construire un tableau de signes.

Exemple : $2x^2 - 4x - 6 = 0$. On obtient $\Delta = 16 + 48 = 64$, puis les racines −1 et 3. Ainsi, $f(x) = 2(x+1)(x-3)$.

### Exploiter la somme et le produit des racines

Si les racines réelles sont $x_1$ et $x_2$ (éventuellement confondues) :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad et \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple : pour $x^2 - 5x + 6$, on cherche deux nombres de somme 5 et de produit 6 : ce sont 2 et 3. Donc $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

**Comprendre l'origine des formules**

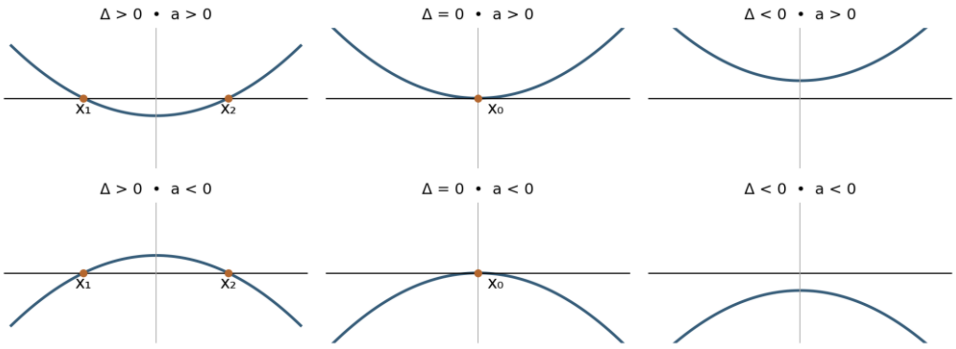
La complétion du carré donne :

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

Ainsi, $f(x) = 0$ équivaut à $(2ax + b)^2 = \Delta$. Les trois cas dépendent donc du signe de $\Delta$.

## 4/ Étudier le signe et résoudre une inéquation

Le signe de $f(x)$ indique si la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses (positif) ou en dessous (négatif). Aux racines, $f(x) = 0$.




**Les trois cas à connaître**

Lorsque $\Delta > 0$, on note les racines dans l'ordre $x_1 < x_2$.

**Δ > 0**

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | signe de a | | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de a | |

**Δ = 0**

| x | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | signe de a | | 0 | signe de a | |

**Δ < 0** f(x) est strictement du signe de a sur $\mathbb{R}$.

À retenir : un trinôme est du signe de $a$ à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les deux racines. Pour une racine double, le signe ne change pas.

**Résoudre une inéquation du second degré**

1/ Tout ramener dans un même membre pour comparer un trinôme à 0.
2/ Chercher ses racines, puis dresser son tableau de signes.
3/ Lire les intervalles demandés et décider si les racines sont incluses.

Exemple : résoudre $2x^2 - 4x - 6 \leq 0$. Les racines sont −1 et 3, et $a = 2 > 0$. Le trinôme est négatif entre les racines et nul aux racines.

$$S = [-1; 3]$$

Pour $2x^2 - 4x - 6 < 0$, on aurait $S = ]-1; 3[$. Pour $2x^2 - 4x - 6 \geq 0$, on aurait $S = ]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$.

## 5/ Utiliser le second degré dans un problème

### Déterminer un trinôme à partir de ses racines

Si un trinôme s'annule en deux réels distincts $r$ et $s$, il s'écrit $f(x) = a(x-r)(x-s)$ avec $a \neq 0$. Une valeur supplémentaire peut déterminer $a$.

Exemple : racines −1 et 3, et $f(0) = -6$. Alors $f(x) = a(x+1)(x-3)$ et $-3a = -6$, donc $a = 2$.

### Résoudre une inéquation avec un quotient

On commence par exclure les valeurs qui annulent le dénominateur. On étudie ensuite le signe de chaque facteur, puis celui du quotient.

$$\frac{x^2-5x+6}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x-3)}{x-1} \geq 0 \quad (x \neq 1)$$

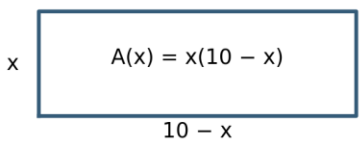
| $x$ | $]-\infty;1[$ | **1** | $]1;2[$ | **2** | $]2;3[$ | **3** | $]3;+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)(x-3)$ | + | + | + | 0 | − | 0 | + |
| $x-1$ | − | 0 | + | + | + | + | + |
| Quotient | − | ‖ | + | 0 | − | 0 | + |

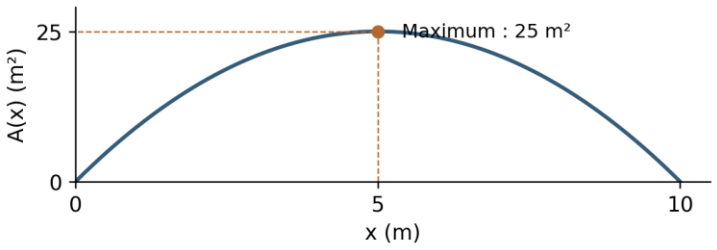
On retient les valeurs où le quotient est positif ou nul : $S = ]1;2] \cup [3;+\infty[$. La double barre indique que 1 est une valeur interdite.

### Chercher une aire maximale

Un rectangle a un périmètre de 20 m. Si un côté mesure $x$ mètres, l'autre mesure $10-x$ mètres, avec $0 < x < 10$. Son aire vaut :

$$A(x) = x(10-x) = -x^2 + 10x = -(x-5)^2 + 25$$




Comme $(x-5)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 25$, avec égalité pour $x = 5$. L'aire maximale est donc 25 m², obtenue pour un carré de côté 5 m.