Corrigé du sujet de maths du CRPE 2025

Ce sujet est donné à titre indicatif et n'a pas de valeur officielle.
EN COURS DE RELECTURE

Corrigé de l'exercice 1

1. Comparaison des devis pour 24 élèves

Le coût total pour 24 élèves avec l'organisme A est :

$$f(24) = 1500 + 100 \times 24 = 3900 \text{ euros}$$

Le coût total pour 24 élèves avec l'organisme B est :

$$g(24) = 2000 + 85 \times 24 = 4040 \text{ euros}$$

L'organisme A est donc plus avantageux pour 24 élèves.

2. Expressions des fonctions et résolution de l'équation

a. Expressions de $f(x)$ et $g(x)$
L'expression du coût en fonction du nombre x d'élèves est :

$$f(x) = 1500 + 100x$$

$$g(x) = 2000 + 85x$$

b. Résolution de $f(x) = 4300$

$$1500 + 100x = 4300$$

$$100x = 2800$$

$$x = 28$$

Cela signifie que si 28 élèves s'inscrivent, le coût total du voyage scolaire avec l'organisme A sera de 4300 euros.

c. Déterminer le seuil à partir duquel l'organisme B devient plus avantageux
On cherche x tel que :

$$1500 + 100x \geq 2000 + 85x$$

$$100x - 85x \geq 2000 - 1500$$

$$15x \geq 500$$

$$x \geq 34$$

L'organisme B devient plus avantageux à partir de 34 élèves.

3. Répartition du financement

a. Proportion payée par les familles
La mairie finance $\frac{2}{5}$ du coût total. Il reste donc :

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

La coopérative prend en charge la moitié de ce reste :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

La part restant à la charge des familles est donc :

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Les familles paient donc $\frac{3}{10}$ du coût total.
b. Montant financé par la coopérative pour 44 élèves avec l'organisme B
Le coût total est :

$$g(44) = 2000 + 85 \times 44$$

$$= 2000 + 3740 = 5740 \text{ euros}$$

La coopérative prend en charge $\frac{3}{10}$ du coût total :

$$\frac{3}{10} \times 5740 = 1722 \text{ euros}$$

Par élève :

$$\frac{1722}{44} \approx 39 \text{ euros}$$

Ainsi, la coopérative finance environ 39 euros par élève.

Corrigé de l'exercice 2

1. Probabilité d'obtenir une somme de 3

Chaque jeton a deux faces : 0 et 1. Il y a donc $2^3 = 8$ issues possibles lors du lancer de trois jetons :

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)$$

Parmi ces issues, une seule donne une somme égale à 3 : $(1,1,1)$.

La probabilité d'obtenir cette somme est donc :

$$\frac{1}{8}$$

2. Justification de l'affirmation de Jeanne

Jeanne affirme que « deux jetons au moins donneront le même résultat ».

Le nombre total d'issues est $2^3 = 8$. Les résultats possibles sont :

- Trois faces identiques : $(0,0,0)$ ou $(1,1,1)$

- Deux faces identiques et une différente : $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$

Dans tous les cas, **au moins deux jetons affichent la même face**.

Il est impossible d'obtenir trois faces différentes puisque seules les valeurs 0 et 1 sont possibles.

Conclusion : Jeanne a raison.

3. Justification de l'affirmation d'Olivier

Olivier affirme que l'on a **une chance sur deux d'obtenir trois faces identiques**.

On sait que les cas où les trois faces sont identiques sont :

$$(0,0,0) \text{ et } (1,1,1)$$

Cela représente **2 cas** sur un total de $2^3 = 8$ cas possibles.

La probabilité d'obtenir trois faces identiques est donc :

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Or, **$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$**, donc Olivier a tort.

Corrigé de l'exercice 3

Partie A

1. Calcul du volume de la fosse

Le volume d'un parallélépipède rectangle se calcule par la formule :

$$V = L \times l \times h$$

avec : - $L = 30\,\text{m}$ (longueur), - $l = 15\,\text{m}$ (largeur), - $h = 3\,\text{m}$ (profondeur).

Le volume de la fosse est donc :

$$V = 30 \times 15 \times 3 = 1350\,\text{m}^3$$

2. Volume de terre à évacuer

Le volume de terre retirée augmente de 25

$$V_{\text{terre}} = V \times (1 + 0.25)$$

$$V_{\text{terre}} = 1350 \times 1.25 = 1687.5\,\text{m}^3$$

3. Nombre de bennes nécessaires

Chaque benne peut transporter 30 m³ de terre. Le nombre minimal de bennes nécessaires est :

$$\text{Nombre de bennes} = \frac{V_{\text{terre}}}{30}$$

$$\text{Nombre de bennes} = \frac{1687.5}{30} \approx 56.25$$

Comme le nombre de bennes doit être entier, il faut arrondir à l'entier supérieur. Il faut donc **57 bennes** pour évacuer toute la terre.

Partie B

1. Pourcentage d'augmentation du volume d'eau

Le volume d'eau initial est de 562 100 litres, et après chauffage, il est de 564 000 litres. Le pourcentage d'augmentation du volume est :

$$p = \frac{564000 - 562100}{562100} \times 100$$

$$p = \frac{1900}{562100} \times 100 \approx 0.338\%$$

Le pourcentage d'augmentation est donc **0.34

2. Hauteur de l'eau dans la piscine

Le volume de la piscine est :

$$V_{\text{piscine}} = L \times l \times h$$

Avec : - $L = 25\,\text{m}$, - $l = 12.5\,\text{m}$, - $V_{\text{eau}} = 564000\,\text{litres} = 564\,\text{m}^3$ (en convertissant les litres en mètres cubes).

On cherche la hauteur h de l'eau, donc :

$$h = \frac{V_{\text{eau}}}{L \times l} = \frac{564}{25 \times 12.5} = \frac{564}{312.5} \approx 1.8\,\text{m}$$

La hauteur de l'eau dans la piscine est donc **1.80 m** (arrondi au cm).

Partie C

1. Vitesse moyenne de l'élève

L'élève effectue 16 longueurs en 10 minutes. La distance totale parcourue est de :

$$\text{Distance} = 16 \times 25 = 400\,\text{m}$$

La vitesse moyenne en mètres par minute est :

$$V_{\text{m/min}} = \frac{400}{10} = 40\,\text{m/min}$$

La vitesse moyenne en kilomètres par heure est :

$$V_{\text{km/h}} = 40 \times \frac{60}{1000} = 2.4\,\text{km/h}$$

La vitesse moyenne de l'élève est donc de **40 m/min** ou **2.4 km/h**.

2. Nombre de longueurs effectuées par l'autre élève

Cet élève nage à 0.6 mètre par seconde pendant 10 minutes. La distance totale parcourue est :

$$\text{Distance} = 0.6 \times 60 \times 10 = 360\,\text{m}$$

Le nombre de longueurs effectuées est :

$$\text{Nombre de longueurs} = \frac{360}{25} = 14.4$$

Ce qui signifie que l'élève a effectué **14 longueurs complètes**.

3. Tableur

a. Formule pour calculer la distance parcourue

Pour calculer la distance parcourue par chaque élève, on multiplie le nombre de longueurs effectuées par la longueur de la piscine, soit 25 mètres. La formule à saisir dans la cellule B3 est donc la suivante :

$$= B2 \times 25$$

Cette formule peut être recopiée vers la droite pour calculer la distance parcourue par tous les élèves.

b. Proportion d'élèves ayant parcouru 12 longueurs ou plus

Les élèves ayant parcouru 12 longueurs ou plus sont les élèves 1, 2, 6, 7, 8, et 9. Il y a donc 6 élèves sur 9 qui ont parcouru 12 longueurs ou plus.

La proportion d'élèves ayant parcouru 12 longueurs ou plus est donc :

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

La réponse est donc $\frac{2}{3}$.

c. Médiane du nombre de longueurs effectuées

Pour déterminer la médiane, nous devons organiser les nombres de longueurs effectuées par ordre croissant :

$$10, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 16$$

La médiane est la valeur située au centre de cet ensemble de données. Comme il y a un nombre impair de valeurs (9), la médiane est la $5^{\text{ème}}$ valeur :

$$\text{Médiane} = 13$$

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que la moitié des élèves ont effectué moins de 13 longueurs, et l'autre moitié en a effectué plus.

d. Nombre moyen de longueurs effectuées par élève

Le nombre moyen de longueurs effectuées par élève se calcule en faisant la somme des longueurs effectuées et en la divisant par le nombre total d'élèves :

$$\frac{15 + 14 + 10 + 11 + 12 + 14 + 11 + 13 + 16}{9} = \frac{116}{9} \approx 12,9$$

Le nombre moyen de longueurs effectuées par élève est donc de $12,9$ longueurs, arrondi au dixième.

e. Nombre de longueurs pour un élève absent

Si un élève était absent et qu'il fallait que le nombre moyen de longueurs effectuées par élève soit 13, alors le total des longueurs effectuées par les 10 élèves doit être :

$$10 \times 13 = 130$$

Or, la somme des longueurs effectuées par les 9 élèves présents est de 116. Il manque donc :

$$130 - 116 = 14$$

Cet élève aurait dû parcourir 14 longueurs pour que le nombre moyen soit de 13 longueurs.

Corrigé de l'exercice 4

1. Donner une valeur de a pour laquelle $\frac{a}{45}$ est un nombre entier naturel.

Pour que $\frac{a}{45}$ soit un nombre entier naturel, a doit être un multiple de 45. Par exemple, une valeur possible de a est $a = 45$, car :

$$\frac{45}{45} = 1$$

Ce qui est un nombre entier naturel.

2. Déterminer toutes les valeurs de b pour lesquelles $\frac{45}{b}$ est un nombre entier naturel. Justifier la réponse.

Les valeurs possibles de b sont les diviseurs de 45. Pour déterminer ces diviseurs, on effectue la décomposition en facteurs premiers de 45 :

$$45 = 3^2 \times 5$$

Les diviseurs de 45 sont donc les entiers naturels suivants :

$$b \in \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Ainsi, les valeurs de b pour lesquelles $\frac{45}{b}$ est un nombre entier naturel sont $1, 3, 5, 9, 15, 45$.

3. Donner une valeur de c pour laquelle $\frac{c}{45}$ est un nombre décimal non entier naturel.

Le nombre 45 étant divisible par 9, on peut choisir un entier divisible par 9. Si l'on choisit $c = 72$, on obtient :

$$\frac{72}{45} = 1,6$$

Cela donne un nombre décimal non entier naturel.

4. Donner une valeur de d pour laquelle $\frac{45}{d}$ est un nombre décimal non entier naturel.

Pour que $\frac{45}{d}$ soit un nombre décimal non entier naturel, d ne doit pas être un diviseur de 45. Par exemple, si on choisit $d = 8$, on obtient :

$$\frac{45}{8} = 5,625$$

Ce qui donne un nombre décimal non entier naturel.

5. Donner une valeur de e pour laquelle $\frac{e}{45}$ est un nombre rationnel non décimal.

Si on choisit $e = 25$, on obtient :

$$\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

Ce nombre est un nombre rationnel non décimal puisque sa forme décimale est périodique $(0,555\ldots)$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Indiquer la figure qui a la plus grande aire.

La figure qui a la plus grande aire est la **Figure C**.

2. Indiquer la figure qui a la plus petite aire.

La figure qui a la plus petite aire est la **Figure H**.

3. Indiquer quatre figures qui ont le même périmètre et des aires différentes.

Les quatre figures qui ont le même périmètre et des aires différentes sont : **Figures C, H, I et J**.

4. Indiquer trois paires de figures qui ont la même aire mais des périmètres différents. Chaque figure ne peut être citée qu'une seule fois.

Les trois paires de figures qui ont la même aire mais des périmètres différents sont :

— **Paire A - G**
— **Paire B - J**
— **Paire E - I**

Corrigé de l'exercice 6

1. Montrer que le triangle ASC est rectangle isocèle en S

On sait que la pyramide $SABCD$ a pour base un carré $ABCD$ de côté 4 cm et que ses faces latérales sont des triangles équilatéraux.

— Calculons AC à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Comme $AB = BC = 4$ cm, on obtient :

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32.$$

Donc :

$$AC = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

— On sait que les faces latérales sont des triangles équilatéraux, donc $SA = SC$.

— Vérifions que ASC est rectangle en S grâce à la réciproque du théorème de Pythagore.

On teste l'égalité :

$$SA^2 + SC^2 = AC^2.$$

Comme $SA = SC = 4$ cm, on a :

$$4^2 + 4^2 = (4\sqrt{2})^2.$$

$$16 + 16 = 32.$$

L'égalité est vérifiée, donc le triangle ASC est bien rectangle isocèle en S.

2. Patrons de la pyramide

Figure 1 : cette figure est un patron de la pyramide SABCD. La base est un carré et les 4 triangles équilatéraux forment bien les faces.

Figure 2 : cette figure ne peut pas être un patron : T3 et T4 se superposeraient lors du pliage du patron.

Figure 3 : cette figure ne peut pas être un patron de la pyramide SABCD. En effet les triangles ne sont pas équilatéraux. De plus les longueurs de T1 ne correspondraient pas à celles de T2 et T3, ...

3. Scratch

M = 80
N = 90
R = 60
P = 80
T = 4